6 | Les fonctions logarithmes

I La fonction logarithme neperien

Déf: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $\ln(1) = 0$; $x \in]0, +\infty[$

* Proprieté Algebrique:

soit a et b deux nombres **positifs**:

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$

$e \simeq 2{,}71$
$\ln(e) = 1$

⚠ $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$

* Limites de la fonction ln

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$	$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

* L'Etude de signe de la fonction à partir de sa monotonie

monotonie de g	x et a	$g(x)$ et $g(a)$
$\searrow$	$x \leq a$	$g(x) \geq g(a)$
$\nearrow$	$x \leq a$	$g(x) \leq g(a)$

* La Position relative entre la courbe (C) et la droite (D)

$\Rightarrow$ etudier le signe de $(f(x) - y)$

si: $f(x) - y > 0$; On dit que (C) est dessus de (D)
si: $f(x) - y < 0$: On dit que (C) est dessous (D)

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y$	‖	$-$	0	$+$	
Position relative	‖	(C) au dessous de (D)		(C) au dessus de (D)	

* La derivée de $\ln|u(x)|$

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

II fonction logarithme de la base a

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow$ Si $a \in]0, 1[\Rightarrow (\log_a(x))' < 0$
$\Rightarrow \log_a$ est decroissante

$\Rightarrow$ si $a \in]1, +\infty[\Rightarrow (\log_a(x))' > 0$
$\Rightarrow \log_a$ est croissante

* Proprieté

- $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$